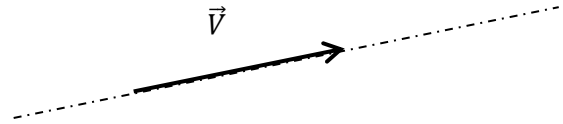


Définition

Un vecteur $\vec{V}$ est défini par :

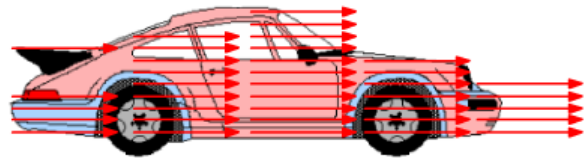
- Un support (ou direction),
- Un sens,
- Une norme $\|\vec{V}\|$.



Représentation de champs de vecteurs

Champ de vecteurs uniforme :

Si, on a le même vecteur en tout point d'un solide (exemple : vecteur vitesse d'un solide en translation rectiligne uniforme) alors la représentation est la suivante :

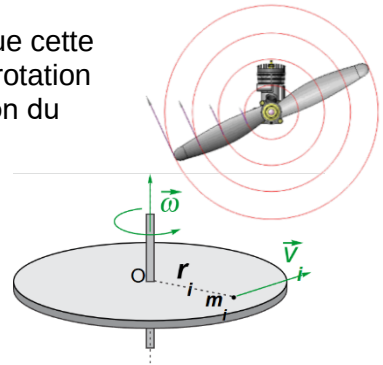


Champ de vecteur vitesse triangulaire

Si on vous indique que le vecteur est tangent à une courbe et que cette courbe est un cercle (exemples : vecteur vitesse d'un solide en rotation autour d'un axe fixe) alors le vecteur est perpendiculaire au rayon du cercle :

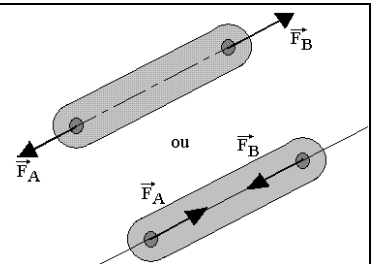
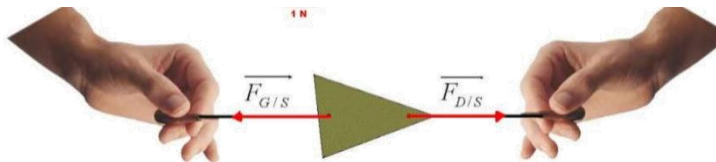
$$\vec{V}_l = \vec{Om}_l \wedge \vec{\omega}$$

La norme du vecteur V croît proportionnellement au rayon R et à la vitesse de rotation de la pièce ω ($V = \omega \cdot R$ avec V en m/s, ω en rad/s et R en mètre)



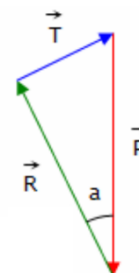
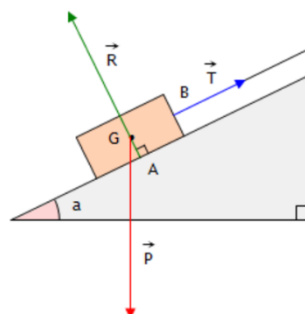
Equilibre, somme, soustraction, produit par un scalaire

Si la somme de **2 vecteurs** est nulle alors les vecteurs ont la même norme et des sens opposés :



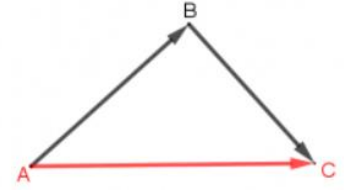
Si la somme de 3 vecteurs est nulle alors ils forment un triangle.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$



Si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ sont trois vecteurs et λ un scalaire alors :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$
- $\lambda (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$
- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



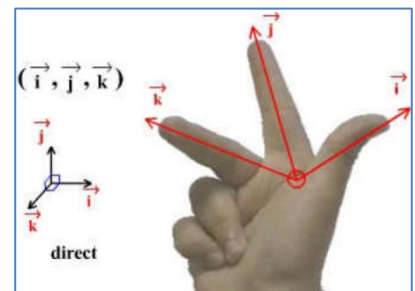
Coordonnées ou composantes dans un repère $\mathcal{R}(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

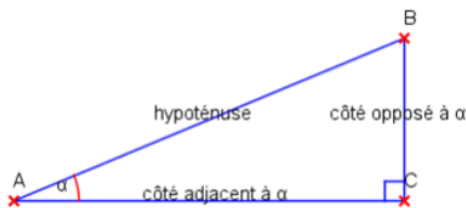
Base orthonormée directe :

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée directe si :

- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ de la base sont orthogonaux,
- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ de la base sont unitaires,
- On passe d'un axe à l'autre par une rotation de $+\pi/2$ (sens trigonométrique).



Projection d'un vecteur dans un plan



Moyen mnémotechnique : SOH CAH TOA

$$\sin \alpha = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$$

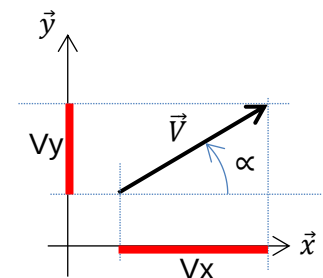
Dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, les relations entre la norme du vecteur, sa direction et ses composantes sont :

$$V_x = \|\vec{V}\| \cdot \cos \alpha$$

$$V_y = \|\vec{V}\| \cdot \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$



Composantes d'un vecteur

Ecritures équivalentes : $\vec{V} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$

$$\vec{V} : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(X, Y, Z)$$

La norme $\|\vec{V}\|$ est égale à : $\|\vec{V}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Soient A et B deux points tels que : A $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$,

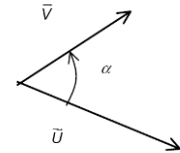
$$\text{le vecteur } \vec{V} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, un vecteur unitaire $\vec{u}$ de direction (AB) et de sens de A vers B : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

Produit scalaire (dot product) de deux vecteurs :

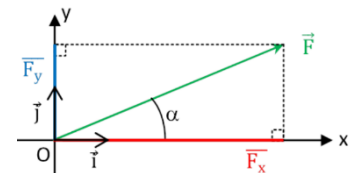
C'est un nombre réel : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\vec{U}, \vec{V})$.

$$\text{Si } \vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$



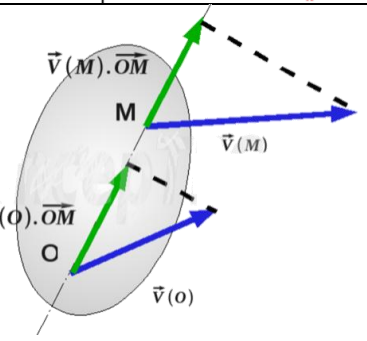
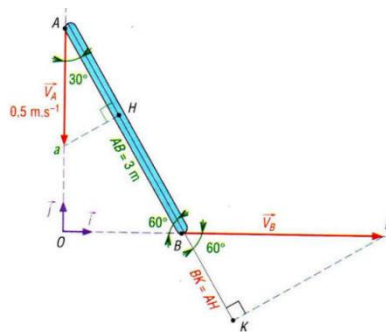
Propriétés :

- $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ si $\vec{U} = 0$ ou $\vec{V} = 0$ ou $(\vec{U}, \vec{V}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (=signifie que $\vec{U}$ est perpendiculaire à $\vec{V}$)
- Dans une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{y} = \vec{z} \cdot \vec{z} = 1$
 $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$
- La composante de $\vec{F}$ sur l'axe x est le résultat du produit scalaire de $\vec{F}$ et du vecteur unitaire $\vec{i}$: $F_x = \vec{F} \cdot \vec{i}$



Equiprojectivité de vecteurs :

Si A et B sont deux points distincts d'un solide, la projection orthogonale du vecteur vitesse du point A sur la droite (AB) est égale à la projection orthogonale du vecteur vitesse du point B sur la même droite (AB)



$$\vec{V}(O) \cdot \vec{OM} = \vec{V}(M) \cdot \vec{OM}$$

Produit vectoriel (cross product) de deux vecteurs :

Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{W}$ est tel que :

- Le support de $\vec{W}$ est **perpendiculaire au plan** $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.
- Le sens de $\vec{W}$ est tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ soit **direct**.
- La norme de $\vec{W}$ a pour valeur

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|.$$

Expression analytique :

$$\text{Si } \vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \begin{pmatrix} Y_1 \cdot Z_2 - Y_2 \cdot Z_1 \\ Z_1 \cdot X_2 - Z_2 \cdot X_1 \\ X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- Antisymétrie : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$.
- Cas de nullité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = 0$ si $\vec{U} = 0$ ou $\vec{V} = 0$ ou $(\vec{U}, \vec{V}) = 0 + k\pi$ (vecteurs colinéaires).
- Vecteurs d'une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{0}$
 $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$; $\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$; $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$

