

Fonction exponentielle

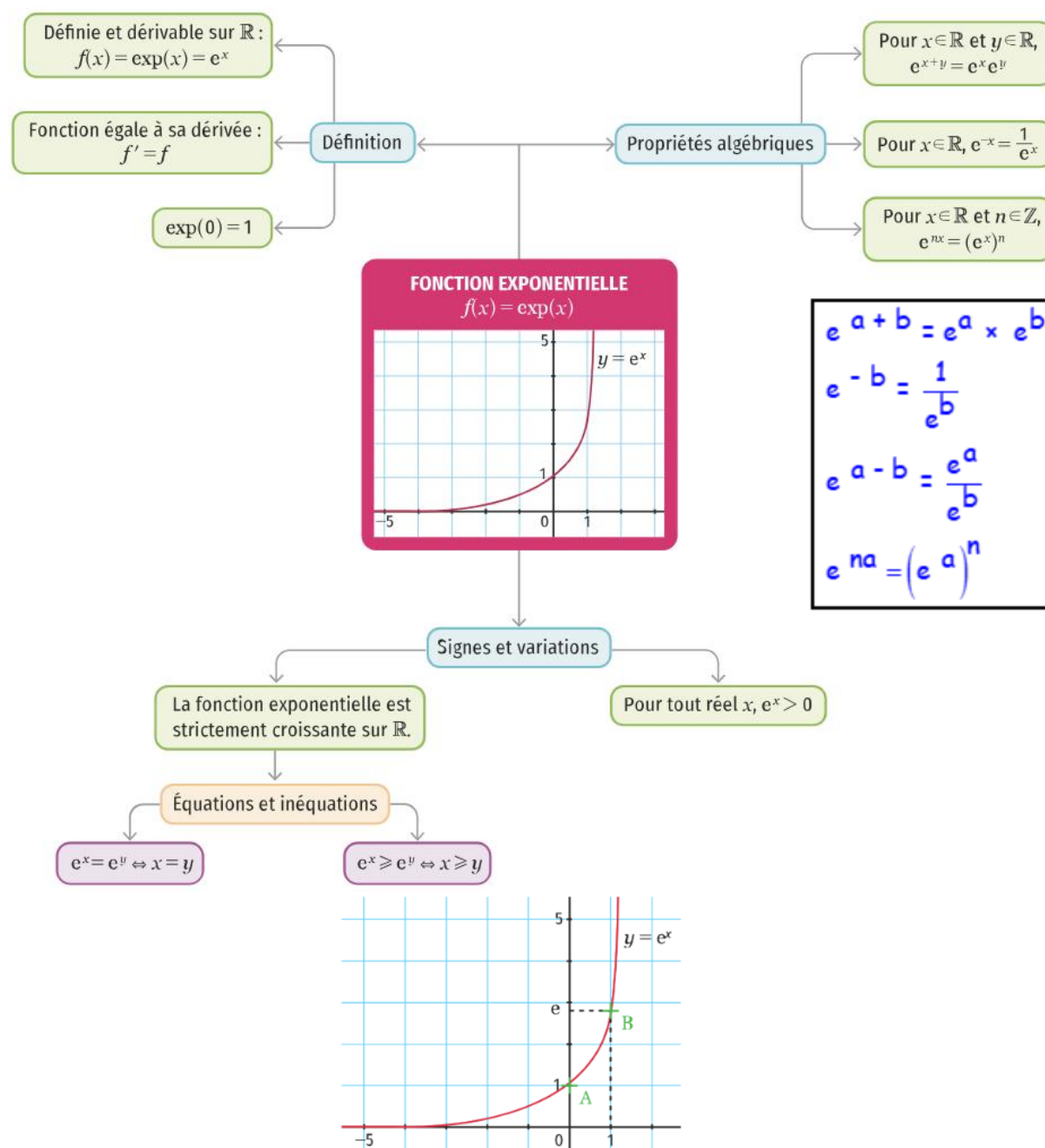
Il existe une unique fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée $\exp$.

Constante d'Euler : Le nombre $\exp(1)$ est noté e et on a $e \approx 2,718$

Donc $\exp(x) = e^x$

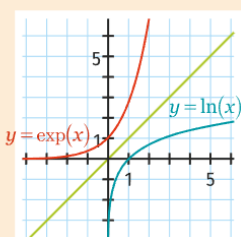


Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est la fonction réciproque à la fonction exponentielle.

Soient a et b deux réels strictement positifs, $n \in \mathbb{Z}$ et u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur I .

Fonction réciproque de la fonction exponentielle



LOGARITHME NÉPÉRIEN

$\ln(a)$ est la solution de $e^x = a$, cela implique $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

$$\begin{aligned}\ln(a \times b) &= \ln(a) + \ln(b) \\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln(a) - \ln(b) \\ \ln(a^n) &= n \ln(a) \\ \ln(\sqrt[n]{a}) &= \frac{1}{n} \ln(a)\end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien :

- est définie sur $]0; +\infty[$;
- est strictement croissante ;
- sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $x > 0$.

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

$\ln(u)$ a le même sens de variation que u sur I

Limites et croissances comparées :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$ pour $n > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour $n > 0$

2. Propriétés de réciprocité de $\ln$ et $\exp$

Propriétés et définition.

1°) Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$(P_{1a}) \quad e^{\ln x} = x$$

2°) Pour tout nombre réel x , on a :

$$(P_{1b}) \quad \ln(e^x) = x$$

On dit que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit : Pour tout réel a strictement positif et tout réel b , on a :

$$(P_{1c}) \quad b = \ln a \iff e^b = a$$

Pourquoi étudier les exponentielles et les logarithmes ?

Les fonctions exponentielles et logarithmes sont utilisées pour modéliser :

- la croissance d'une population ;
- la décharge d'une batterie ;
- le refroidissement d'une pièce ;
- l'usure d'un outil ;
- la fiabilité d'un système ;
- les phénomènes de vibration et d'automatisme.

Les exponentielles et logarithmes interviennent dans :

- la fiabilité des systèmes mécaniques ;
- les lois de dégradation des composants ;
- les phénomènes thermiques ;
- l'automatique et les systèmes du premier ordre ;
- les calculs de durée de vie des outils ;
- l'étude des capteurs et actionneurs.

Elles constituent une base importante pour l'analyse des procédés industriels et des systèmes mécatroniques rencontrés en BTS.

Applications en Conception Mécanique

Décroissance Exponentielle

- **Usure des outils** : Modélisée en fonction de l'usure initiale et de constantes spécifiques aux conditions d'utilisation.
- **Refroidissement** : Températures en fonderie ou traitement thermique.
- **Contraintes en fonction du temps** : Certaines déformations suivent des lois exponentielles (fluage).

Exponentielles et logarithmes

Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = e^x$
définie sur $\mathbb{R}$
à valeurs dans $]0; +\infty[$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e \approx 2,718$$

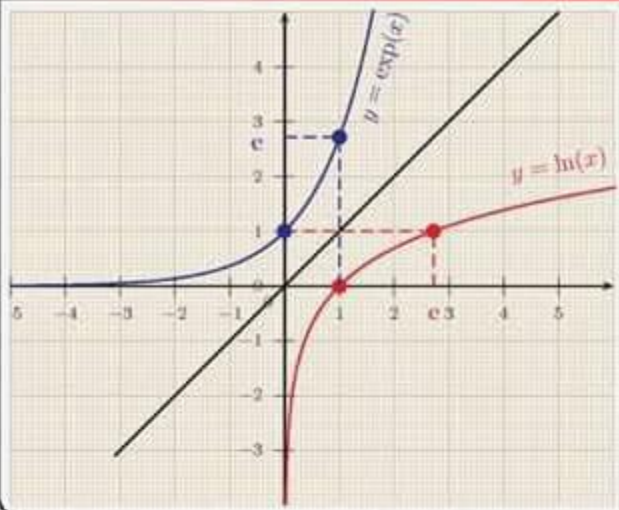
$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$
définie sur $]0; +\infty[$
à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

- ◇ Produit : $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- ◇ Inverse : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- ◇ Quotient : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- ◇ Puissance : $(e^a)^n = e^{an}$
- ◇ Racine carrée : $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

- ◇ Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- ◇ Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ◇ Quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ◇ Puissance : $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- ◇ Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

- ◇ $\ln(\exp x) = x$ $\ln(e^x) = x$
- ◇ $\exp(\ln x) = x$ $e^{\ln(x)} = x$
- ◇ $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ $e^x = y \iff x = \ln(y)$
- ◇ $x^y = \exp(y \ln(x))$ $x^y = e^{y \ln(x)}$

équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

- ◇ $e^u = e^v \iff u = v$ $e^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$
- ◇ $e^u > e^v \iff u > v$ $e^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$
- ◇ $e^u \leq e^v \iff u \leq v$ $e^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$
- ◇ $e^u > 0$ toujours vrai

équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

- ◇ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ $\ln(u) = \lambda \iff u = e^\lambda$
- ◇ $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ $\ln(u) > \lambda \iff u > e^\lambda$
- ◇ $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ $\ln(u) \leq \lambda \iff u \leq e^\lambda$
- ◇ $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Les limites usuelles

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$